Penggabungan dan Pemecahan Proses Poisson Independen

Hanna Cahyaningtyas[1], Respatiwulan[2] , Pangadi[3]
[1]Mahasiswa Program Studi Matematika/FMIPA, Universitas Sebelas Maret
[2] Dosen Program Studi Statistika/FMIPA, Universitas Sebelas Maret
[3] Dosen Program Studi Matematika/FMIPA, Universitas Sebelas Maret
email: akaruihanna@student.uns.ac.id

Keywords:
Proses Poisson independen; penggabungan; pemecahan

Abstrak

Proses Poisson adalah himpunan banyaknya kejadian yang terjadi pada interval waktu (0,t] yang memenuhi sifat stationary increment, independent increment, dan orderliness. Sebanyak m proses Poisson yang saling independen dapat dilakukan penggabungan (superposition/merging) sehingga menghasilkan suatu proses Poisson tunggal. Sedangkan suatu proses Poisson tunggal dapat dilakukan pemecahan (thinning) sehingga menghasilkan beberapa proses Poisson yang saling independen. Tujuan dari penelitian ini adalah menurunkan ulang sifat-sifat pada penggabungan dan pemecahan proses Poisson independen, serta menerapkannya pada contoh kasus. Bedasarkan hasil dan pembahasan didapatkan sifat dari penggabungan proses Poisson yang berhubungan dengan distribusi binomial, distribusi multinomial, dan waktu tunggu.

1. PENDAHULUAN

Proses stokastik merupakan kejadian random yang bergantung pada waktu (Mingola [6]). Menurut Allen [2], secara matematis proses stokastik yaitu himpunan dari beberapa variabel random $\{X(t;s) \mid t \in T, s \in S\}$, dengan T adalah himpunan waktu dan S adalah ruang sampel. Proses stokastik waktu diskrit yaitu proses stokastik dengan T terhitung yang merupakan bilangan bulat positif. Proses stokastik waktu kontinu yaitu proses stokastik dengan T merupakan suatu interval dari garis bilangan.

Suatu proses stokastik disebut sebagai proses menghitung (counting process) apabila terdapat N(t) yaitu banyaknya kejadian yang terjadi sampai waktu t, dengan $t \geq 0$. Proses menghitung disebut sebagai proses Poisson apabila banyaknya kejadian sampai waktu t atau N(t) memenuhi tiga sifat yaitu stationary increment, independent increment, dan orderliness (Mingola [6]).

Proses Poisson memiliki variabel random yang berdistribusi Poisson. Keistimewaan dari distribusi Poisson yaitu rata-rata (mean) dan variansi memiliki nilai yang sama yaitu sebesar λt. Ketika t=1 didapatkan intensitas (parameter) dari proses Poisson yaitu sebesar λ yang menyatakan banyaknya kejadian yang terjadi setiap satu waktu.

Menurut DeJardine [3], proses Poisson independen dapapat dilakukan penggabungan (superposition) maupun pemecahan (thinning) proses Poisson. Penggabungan proses Poisson independen merupakan penjumlahan dari beberapa proses Poisson menjadi proses Poisson tunggal. Sedangkan pemecahan proses Poisson merupakan penguraian suatu proses Poisson tunggal menghasilkan beberapa proses Poisson yang saling independen.

Mingola [6] dalam penelitiannya menjelaskan tentang sifat-sifat proses Poisson termasuk diantaranya adalah sifat dua proses Poisson independen. Sifat dua proses Poisson independen yaitu penggabungan dan pemecahan proses Poisson juga dijelaskan oleh Agarwal [1] dan DeJardine [3]. Sedangkan Kulkarni [5] dalam bukunya menjelaskan tentang sifat-sifat dari penggabungan dan pemecahan proses Poisson independen sejumlah m proses. Oleh karena itu, penelitian ini menurunkan ulang sifat penggabungan dan pemecahan proses Poisson independen yang terdapat dalam buku Kulkarni [5] berdasarkan sifat-sifat proses Poisson yang dijelaskan Mingola [6].

2. METODE

Penelitian ini dilakukan dengan mengikuti prosedur dan langkah berikut.

Menurunkan ulang sifat-sifat pada penggabungan dan pemecahan proses Poisson independen.

Menjelaskan teorema dasar proses Poisson independen yaitu distribusi waktu antar kedatangan, dan distribusi waktu tunggu.

Menentukan sifat-sifat dari penggabungan dan pemecahan proses Poisson yang berhubungan dengan distribusi binomial, disribusi multinomial, dan waktu tunggu.

Menerapkan penggabungan dan pemecahan proses Poisson independen pada contoh kasus.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut merupakan hasil dan pembahasan dari penelitian ini.

3.1 Sifat-sifat Proses Poisson

Menurut Ross [7], proses menghitung $\{N(t)|t \geq 0\}$ dikatakan sebagai suatu proses Poisson dengan intensitas (parameter) λ, $\lambda > 0$ memiliki sifat-sifat sebagai berikut.

1. $N(t) = 0$
2. Proses memiliki *independent increment*.
3. Banyaknya kejadian dalam interval sepanjang t memiliki distribusi Poisson dengan rata-rata λt. Untuk semua $s, t \geq 0$,
$$P(N(t+s) - N(s) = e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^k}{k!}$$
dengan k merupakan banyaknya kejadian, e adalah bilangan konstan bernilai 2,71828, dan λt adalah rata-rata hitung.

Menurut Mingola [6], banyaknya kejadian pada interval (0,t] memenuhi tiga sifat. Pertama, sifat *stationary increment* yang berarti $N(t+s) - N(t)$ memiliki distribusi yang sama dengan $N(s)$ untuk setiap waktu t. Kedua, sifat *independent increment* yaitu probabilitas dari kejadian dengan interval waktu yang saling asing adalah saling bebas. Ketiga, sifat *orderliness* yaitu probabilitas terjadinya lebih dari satu kejadian pada interval waktu sempit sangat kecil.

Pada proses Poisson, jika T_1 adalah interval waktu terjadinya kejadian pertama dan T_k adalah interval waktu antar kejadian ke-$(k-1)$ dengan kejadian ke-k untuk $k \geq 1$, maka $\{T_k|k = 1,2,3,\ldots\}$ adalah barisan waktu antar kejadian (Ross [7]). Berikut adalah teorema yang menjelaskan sifat-sifat proses Poisson berkaitan dengan penggabungan dan pemecahan proses Poisson independen menurut Mingola [6].

Teorema 3.1. Waktu antar kejadian T_k untuk $k = 1,2,3,..$ dari suatu proses Poisson

ISSN 2407-9189

adalah saling independen dan berdistribusi eksponensial dengan parameter λ.

Bukti. Pada saat $T_1 > t$ berarti tidak ada kejadian pada interval waktu $(0, t]$ sehingga $N(t) = 0$ dan memiliki probabilitas sebagai berikut.

$$P(N(t) = 0) = \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^0}{0!} = e^{-\lambda t}.$$

Ketika $T_1 \leq t$ duperoleh

$$F_{T_1}(t) = P(T_1 \leq t) = 1 - e^{-\lambda t}$$

sehingga

$$f_{T_1}(t) = \frac{d\, F_{T_1}(t)}{dt} = \lambda e^{-\lambda t}.$$

Untuk T_2 diperoleh probabilitas dari kejadian pertama saat waktu s sehingga

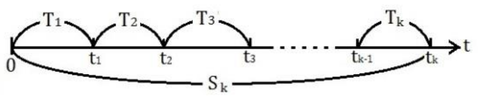
$$\begin{aligned} P(T_2 \leq t | T_1 = s) &= 1 - P(T_2 > t | T_1 = s) \\ &= 1 - P(N(t+s) - N(s) = 0 \\ &\quad | T_1 = s). \end{aligned}$$

Berdasarkan sifat *independent increment* dan *stationary increment* diperoleh

$$\begin{aligned} P(T_2 \leq t | T_1 = s) &= 1 - P(N(t) = 0) \\ &= 1 - e^{-\lambda t} \\ &= F(T_2) \end{aligned}$$

Didapatkan $F(T_2)$ tidak tergantung pada T_1 sehingga T_1 dan T_2 saling independen berdistribusi eksponensial dengan parameter λ. Hal tersebut berlaku juga untuk $T_3, T_4, \ldots, T_k$ sehingga terbukti bahwa $T_k \sim \exp(\lambda)$ dengan $k = 1,2,3, \ldots$ saling independen. ■

Teorema 3.1 menjelaskan bahwa waktu antar kejadian yang berdistribusi eksponensial dan $E(T_k) = \frac{1}{\lambda}$. Waktu sampai terjadinya kejadian ke-k disebut sebagai waktu tunggu yang dinotasikan dengan S_k sehingga hubungan dari T_k dan S_k dapat diilustrasikan pada gambar berikut.



Gambar 1. Ilustrasi Waktu Tunggu

Berdasarkan Gambar 1 didapatkan bahwa penjumlahan seluruh waktu antar kejadian sampai terjadinya kejadian ke-k menghasilkan waktu tunggu. Waktu tunggu sampai terjadi k kejadian dapat dituliskan menjadi

$S_k = T_1 + T_2 + \cdots + T_k.$

Distribusi waktu tunggu pada proses Poisson dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 3.2. Jika $\{N(t) | t \geq 0\}$ adalah proses Poisson dengan parameter λ dan waktu tunggu sampai terjadi kejadian ke k dinotasikan dengan S_k, maka fungsi kepadatan probabilitas dari S_k yaitu

$$f_{S_k}(t) = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda t} \; ; k = 1,2,3, \ldots. \quad (3.1).$$

Bukti. Ketika $S_k \leq t$ terdapat minimal k kejadian pada interval waktu $(0, t]$ sehingga

$$\begin{aligned} F_{S_k}(t) &= P(S_k \leq t) \\ &= P(N(t) \geq k) \\ &= \sum_{n=k}^{k} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!} \\ &= 1 - \sum_{n=0}^{k-1} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^n}{n!}. \end{aligned}$$

Kemudian dilakukan penurunan terhadap $F_{S_k}(t)$ untuk memperoleh suatu fungsi kepadatan probabilitas sebagai berikut.

$$f_{S_k}(t) = \frac{d\, F_{S_k}(t)}{dt} = \frac{\lambda^k t^{k-1}}{(k-1)!}; \qquad k = 1,2, \ldots$$

Terbukti bahwa persamaan (3.1) merupakan fungsi kepadatan probabilitas dari waktu tunggu. ■

Menurut Agarwal [1], persamaan (3.1) memiliki distribusi Erlang dengan $E(S_k) = \frac{k}{\lambda}$. Berdasarkan Teorema 3.2 didapatkan $S_k \sim \text{Erlang}(k, \lambda)$ dengan k bernilai bilangan bulat positif.

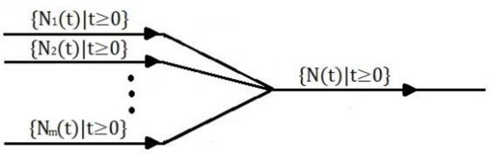
3.2 Penggabungan dan Pemecahan Proses Poisson Independen

Proses $\{N_1(t) | t \geq 0\}, \{N_2(t) | t \geq 0\}, \ldots, \{N_m(t) | t \geq 0\}$ dikatakan independen untuk sebanyak m kejadian dengan waktu $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_m$, apabila terdapat

$N_1(t), N_2(t), \ldots, N_m(t)$ yang merupakan variabel random saling independen. Sebanyak *m* proses Poisson independen dapat dilakukan penggabungan (*superposition/ merging*) maupun pemecahan (*thinning*).

3.3 Penggabungan Proses Poisson Independen

Sebanyak m proses Poisson independen dilakukan penggabungan seperti yang diilustrasikan pada gambar berikut.



Gambar 2. Ilustrasi Penggabungan Proses Poisson Independen

Berdasarkan Gambar 2 didapatkan bahwa penggabungan proses Poisson independen menghasilkan suatu proses Poisson tunggal yaitu $\{N(t)|t \geq 0\}$. Berikut adalah teorema penggabungan proses Poisson independen menurut Kulkarni [5].

Teorema 3.3. Jika $\{N_1(t)|t \geq 0\}$, $\{N_2(t)|t \geq 0\}, \ldots, \{N_m(t)|t \geq 0\}$ adalah proses Poisson yang saling independen dengan parameter berturut-turut $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, maka penggabungan semua proses tersebut menjadi proses tunggal yaitu $\{N(t)|t \geq 0\}$ untuk $N(t) = N_1(t) + N_2(t) + \cdots N_m(t)$ merupakan proses Poisson dengan parameter $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$.

Bukti. Ambil sembarang $N_i(t) = k_i$ dan $k = \sum_{i=1}^{m} k_i$ sehingga probabilitas $N(t)$ yaitu

$$P(N(t) = k)$$

$$= P(N_1(t) + N_2(t) + \cdots + N_m(t) = k)$$

$$= \sum_{k_i \geq 0} P(N_1(t) = k_1, N_2(t) = k_2, \ldots, N_m(t) = k_m)$$

$$= \sum_{k_i \geq 0} P(N_1(t) = k_1)\, P(N_2(t) = k_2) \ldots P(N_m(t) = k_m)$$

$$= \sum_{k_i \geq 0} \frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^{k_1}}{k_1!} \frac{e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^{k_2}}{k_2!} \ldots \frac{e^{-\lambda_m t}(\lambda_m t)^{k_m}}{k_m!}$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)t}}{(k_1 + k_2 \ldots + k_m)!} \sum_{k_i \geq 0} \frac{(k_1 + k_2 \ldots + k_m)!}{k_1!\, k_2! \ldots k_m!} (\lambda_1 t)^{k_1} \ldots (\lambda_m t)^{k_m}.$$

Menggunakan persamaan multinomial Newton didapatkan

$$P(N(t) = k)$$

$$= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)t}}{(k_1 + k_2 \ldots + k_m)!} (\lambda_1 t + \lambda_2 t + \cdots + \lambda_m t)^k$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}}{k!} (\lambda t)^k$$

Terbukti bahwa $\{N(t)|t \geq 0\}$ merupakan proses Poisson dengan parameter λ. ■

Teorema 3.3 menjelaskan bahwa penggabungan proses Poisson yang saling independen menghasilkan proses tunggal yang juga berdistribusi Poisson. Parameter proses Poisson tunggal merupakan jumlahan dari beberapa parameter pada proses Poisson awal yang saling independen. Berikut adalah teorema tentang penggabungan proses Poisson independen yang berhubungan dengan distribusi binomial.

Teorema 3.4. Jika $\{N_1(t)|t \geq 0\}$, $\{N_2(t)|t \geq 0\}, \ldots, \{N_m(t)|t \geq 0\}$ adalah proses Poisson sebanyak m yang saling independen dengan parameter berturut-turut $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, maka $N_u(t)$ untuk $1 \leq u \leq m$ bersyarat $N(t) = N_1(t) + N_2(t) + \cdots + N_m(t)$ memiliki distribusi binomial dengan probabilitas $p_u = \frac{\lambda_u}{\lambda}$.

Bukti. Ambil sembarang $N_i(t) = k_i$ dan $k = \sum_{i=1}^{m} k_i$ sehingga probabilitas dari $N_u(t)|N(t)$ yaitu

$$P(N_u(t) = k_u | N(t) = k)$$

$$= \frac{P(N_u(t) = k_u) P(N(t) - N_u(t) = k - k_u)}{P(N(t) = k)}$$

$$= \frac{\frac{e^{-\lambda_u t}(\lambda_u t)^{k_u}}{k_u!} \frac{e^{-(\lambda-\lambda_u)t}((\lambda-\lambda_u)t)^{k-k_u}}{k_u!}}{\frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}}$$

ISSN 2407-9189

$$= \frac{k!}{k_u!\,(k-k_u)!}\frac{\lambda_u^{k_u}}{\lambda^{k_u}}\frac{(\lambda-\lambda_u)^{k-k_u}}{\lambda^{k-k_u}}$$

$$= C_{k_u}^{k}\left(\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)^{k_u}\left(1-\frac{\lambda_u}{\lambda}\right)^{k-k_u}$$

Terbukti bahwa $N_u(t)$ bersyarat $N(t)$ memiliki distribusi binomial dengan probabilitasnya yaitu $p_u = \frac{\lambda_u}{\lambda}$ untuk $1 \leq u \leq m$. ∎

Berdasarkan Teorema 3.4 dijelaskan bahwa probabilitas bersyarat pada proses Poisson merupakan hubungan antara proses Poisson dengan distribusi binomial. Penggabungan proses Poisson independen juga berhubungan dengan distribusi multinomial yang dijelaskan pada teorema berikut.

Teorema 3.5. Jika $\{N_1(t)|t \geq 0\}, \{N_2(t)|t \geq 0\}, \dots, \{N_m(t)|t \geq 0\}$ adalah proses Poisson yang saling independen dengan parameter berturut-turut $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, maka distribusi dari $N_1(t), N_2(t), \dots, N_m(t)$ bersyarat $N(t) = N_1(t) + N_2(t) + \cdots + N_m(t)$ adalah multinomial dengan probabilitas $p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$.

Bukti. Ambil sembarang $N_i(t) = k_i$ dan $k = \sum_{i=1}^{m} k_i$ sehingga didapatkan probabilitas $N_1(t), N_2(t), \dots, N_m(t)|N(t)$ yaitu

$$P(N_1(t), N_2(t), \dots, N_m(t)|N(t) = k)$$

$$= \frac{P(N_1(t) = k_1, N_2(t) = k_2, \dots, N_m(t) = k_m)}{P(N_1(t) + N_2(t) + \cdots + N_m(t) = k)}$$

$$= \frac{P(N_1(t) = k_1)P(N_2(t) = k_2), \dots, P(N(t) = k_m))}{P(N_1(t) + N_2(t) + \cdots + N_m(t) = k)}.$$

Berdasarkan Teorema 3.3 diperoleh

$$P(N_1(t), N_2(t), \dots, N_m(t)|N(t) = k)$$

$$= \frac{\frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^{k_1}}{k_1!}\frac{e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^{k_2}}{k_2!}\cdots\frac{e^{-\lambda_m t}(\lambda_m t)^{k_m}}{k_m!}}{\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_m)t}}{(k_1+k_2\dots+k_m)!}(\lambda_1 t + \lambda_2 t + \cdots + \lambda_m t)^k}$$

$$= \frac{(k_1 + k_2 \dots + k_m)!}{k_1!\,k_2!\dots k_m!}\frac{\lambda_1^{k_1}\lambda_2^{k_2}\dots\lambda_m^{k_m}}{(\lambda_1 t + \lambda_2 t + \cdots + \lambda_m t)^k}$$

$$= \frac{(k_1 + k_2 \dots + k_m)!}{k_1!\,k_2!\dots k_m!}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{k_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^{k_2}\dots\left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^{k_m}$$

Terbukti bahwa $N_1(t), N_2(t), \dots, N_m(t)$ bersyarat $N(t)$ berdistribusi multinomial dengan probabilitas $p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}$ dengan $i = 1,2,3,\dots,m$. ∎

Teorema 3.5 menjelaskan bahwa probabilitas untuk proses Poisson tipe i adalah $p_i = \frac{\lambda_i}{\lambda}; i = 1,2,\dots,m$. Berikut adalah teorema tentang sifat dua proses Poisson independen menurut Gallager [4].

Teorema 3.6. Jika terdapat dua proses Poisson independen yaitu $\{N_1(t)|t \geq 0\}$ dengan parameter λ_1 dan $\{N_2(t)|t \geq 0\}$ dengan parameter λ_2, maka probabilitas terjadinya paling sedikit n *kejadian pada proses Poisson pertama sebelum* terjadinya m kejadian pada proses Poisson kedua dinyatakan sebagai berikut.

$$\sum_{k=n}^{n+m-1} C_k^{n+m-1}\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n+m-1-k}.$$

Bukti. Misalkan waktu tunggu atau waktu sampai terjadinya kejadian ke-n pada proses Poisson pertama dinotasikan dengan $S_{1,n}$, dan waktu sampai terjadinya kejadian ke-m pada proses Poisson kedua dinotasikan dengan $S_{2,m}$. Probabilitas terjadinya $m + n - 1$ kejadian pada proses gabungan dengan paling tidak terdapat n kejadian berasal dari proses pertama yaitu sebagai berikut.

$$P(S_{1,n} < S_{2,m})$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m-1} P(N_1(t) = k|N_1(t) + N_2(t) = n + m - 1)$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m-1} \frac{P(N_1(t) = k, N_1(t) + N_2(t) = n + m - 1 - k)}{P(N_1(t) + N_2(t) = n + m - 1)}$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m-1} \frac{\frac{e^{-\lambda_1 t}(\lambda_1 t)^k}{k!}\frac{e^{-\lambda_2 t}(\lambda_2 t)^{n+m-1-k}}{(n+m-1-k)!}}{\frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}((\lambda_1+\lambda_2)t)^{n+m-1-k}}{(n+m-1)!}}$$

$$= \sum_{k=n}^{n+m-1} \frac{(n+m-1)!}{k_1!\,k_2!\dots k_m!} \frac{\lambda_1^k \lambda_2^{n+m-1-k}}{(\lambda_1+\lambda_2)^{n+m-1-k}}$$

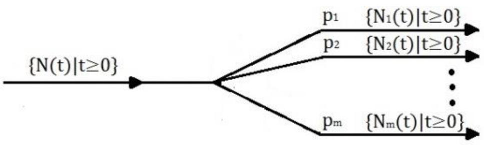
$$= \sum_{k=n}^{n+m-1} C_k^{n+m-1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^k \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\right)^{n+m-1-k}$$

$\blacksquare$

Teorema 3.6 merupakan teorema tentang penggabungan proses Poisson independen untuk dua proses Poisson. Selain itu, teorema tersebut menjelaskan hubungan antara proses Poisson dengan waktu sampai terjadinya suatu kejadian atau yang disebut sebagai waktu tunggu.

3.2.2 Pemecahan Proses Poisson Independen

Misalkan sebuah proses Poisson $\{N(t)|t \geq 0\}$ dengan paramter t diklasikasikan menjadi m tipe kejadian yaitu kejadian tipe $I, II, \dots, m$ dengan probabilitas berturut-turut $p_1, p_2, \dots, p_m$. Banyaknya kejadian pada setiap tipe dalam interval waktu $(0, t]$ dinotasikan dengan $N_1(t), N_2(t), \dots, N_m(t)$ yang diilustrasikan pada gambar berikut.



Gambar 3. Ilustrasi Pemecahan Proses Poisson Independen

Berdasarkan Gambar 3 didapatkan bahwa pemecahan pada proses Poisson menguraikan suatu proses Poisson tunggal menjadi m proses Poisson independen. Berikut adalah teorema tentang pemecahan proses Poisson menurut Kulkarni [5].

Teorema 3.7. Jika $\{N(t)|t \geq 0\}$ adalah proses Poisson dengan parameter λ, maka pemecahan proses Poisson pada $[0, t)$ menghasilkan $\{N_1(t)|t \geq 0\}, \{N_2(t)|t \geq 0\} \dots \{N_m(t)|t \geq 0\}$ yang masing-masing merupakan proses Poisson saling independen dengan parameter berturut-turut $\lambda_1 = \lambda p_1,\ \lambda_2 = \lambda p_2, \dots, \lambda_m = \lambda p_m$.

Bukti. Ambil sembarang $N_u(t) = k_u$ untuk $1 \leq u \leq m$ sehingga probabilitas $N_u(t)$ yaitu

$$P(N_u(t) = k_u)$$

$$= \sum_{k=k_u}^{\infty} P(N_u(t) = k_u | N(t) = k)\, P(N(t) = k).$$

Berdasarkan Teorema 3.4 diperoleh

$$P(N_u(t) = k_u)$$

$$= \sum_{k=k_u}^{\infty} \frac{k!}{k_u!\,(k-k_u)!} p_u^{k_u} (1-p_u)^{k-k_u} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^k}{k!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda p_u t)^{k_u}}{k_u!} \sum_{k=k_u}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p_u)t)^{k-k_u}}{(k-k_u)!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda p_u t)^{k_u}}{k_u!} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda(1-p_u)t)^{k}}{k!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}(\lambda p_u t)^{k_u}}{k_u!} e^{-\lambda(1-p_u)t}$$

$$= \frac{e^{-\lambda p_u t}(\lambda p_u t)^{k_u}}{k_u!}.$$

Terbukti bahwa $\{N_1(t)|t \geq 0\}$, $\{N_2(t)|t \geq 0\}, \dots \{N_m(t)|t \geq 0\}$ adalah proses Poisson dengan parameter berturut-turut $\lambda_1 = \lambda p_1,\ \lambda_2 = \lambda p_2, \dots, \lambda_m = \lambda p_m$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa proses saling independen. Probabilitas bersama dari $N_1(t), N_2(t), \dots, N_m(t)$ adalah

$$P(N_1(t) = k_1, N_2(t) = k_2, \dots, N_m(t) = k_m)$$

$$= P(N_1(t) N_2(t), \dots, N_m(t) | N(t)) P(N(t) = k).$$

Berdasarkan Teorema 3.6 diperoleh

$$P(N_1(t) = k_1, N_2(t) = k_2, \dots, N_m(t) = k_m)$$

$$= \frac{(k_1 + k_2 \dots + k_m)!}{k_1!\,k_2! \dots k_m!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda}\right)^{k_1} \left(\frac{\lambda_2}{\lambda}\right)^{k_2} \dots \left(\frac{\lambda_m}{\lambda}\right)^{k_m} \frac{e^{-\lambda t}(\lambda t)^{k_1+k_2+\dots+k_m}}{(k_1+k_2+\dots+k_m)!}$$

$$= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda_1^{k_1} \lambda_2^{k_2} \dots \lambda_m^{k_m})(\lambda t)^{k_1+k_2+\dots+k_m}}{k_1!\,k_2! \dots k_m!}$$

$$= e^{-\lambda t} \frac{(\lambda_1 t)^{k_1}}{k_1!} \frac{(\lambda_2 t)^{k_2}}{k_2!} \dots \frac{(\lambda_m t)^{k_m}}{k_m!}$$

$$= \frac{e^{-\lambda p_1 t}(\lambda_1 t)^{k_1}}{k_1!} \frac{e^{-\lambda p_2 t}(\lambda_2 t)^{k_2}}{k_2!} \dots \frac{e^{-\lambda p_m t}(\lambda_m t)^{k_m}}{k_m!}$$

ISSN 2407-9189

$$= P(N_1(t) = k_1)P(N_2(t) = k_2) \dots P(N_m(t) = k_m).$$

Terbukti bahwa $\{N_1(t)|t \geq 0\}$, $\{N_2(t)|t \geq 0\}, \dots \{N_m(t)|t \geq 0\}$ adalah proses Poisson yang saling independen dengan parameter berturut-turut $\lambda_1 = \lambda p_1,\ \lambda_2 = \lambda p_2, \dots, \lambda_m = \lambda p_m$.

■

Teorema 3.7 menjelaskan bahwa proses Poisson tunggal dapat dipecah menjadi sebanyak *m* proses Poisson yang saling independen. Parameter yang dihasilkan pemecahan proses Poisson independen adalah $\lambda_1 = \lambda p_1,\ \lambda_2 = \lambda p_2, \dots, \lambda_m = \lambda p_m$.

3.3 Penerapan Kasus

Berikut adalah penerapan contoh kasus penggabungan dan pemecahan proses Poisson independen.

3.3.1 Contoh Kasus Penggabungan Proses Poisson Independen

Funnshop adalah *online shop* yang mempromosikan dagangannya melalui tiga akun media sosial. Masing-masing akun memiliki jumlah pengikut yang bertambah setiap waktu mengikuti proses Poisson. Rata-rata banyaknya penambahan pengikut akun instagram, facebook, dan twitter berturut-turut sebanyak 2,6,1 setiap jam yang saling independen.

Misalkan sebanyak tiga proses Poisson independen dinotasikan sebagai $\{N_{ig}(t)|t \geq 0\}$, $\{N_{fb}(t)|t \geq 0\}$, dan $\{N_{tw}(t)|t \geq 0\}$ dengan $N_{ig}(t)$, $N_{fb}(t)$, dan $N_{tw}(t)$ berturut-turut adalah banyaknya penambahan pengikut sampai waktu t untuk akun instagram, facebook, dan twitter. Parameter masing-masing proses yaitu $\lambda_{ig} = 2$ pengikut/jam, $\lambda_{fb} = 6$ pengikut/jam, dan $\lambda_{tw} = 2$ pengikut/jam.

Berdasarkan Teorema 3.3 diperoleh proses Poisson tunggal yaitu $\{N(t)|t \geq 0\}$ dengan $N(t)$ adalah banyaknya pengikut di semua akun media sosial sampai waktu *t* dan parameternya $\lambda = 9$ pengikut/jam. Berikut adalah analisis dari kasus ini.

a. Menentukan waktu harapan terjadinya penambahan pengikut berikutnya. Menggunakan Teorema 3.1 didapatkan waktu sampai terjadi penambahan satu pengikut berikutnya berdistribusi eksponensial sehingga $E(T_1) = \frac{1}{9} = 0{,}1111$. Jadi waktu yang diharapkan sampai bertambahnya pengikut berikutnya adalah $\frac{1}{9}$ jam $= 6$ menit 40 detik.
b. Menentukan probabilitas bahwa pengikut akun twitter akan bertambah pada 12 jam kedepan. Menggunakan Teorema 3.1 didapatkan $\left(T_{tw,1} > \frac{1}{2}\right) = 0{,}3935$. Jadi besarnya kemungkinan pengikut akun twitter bertambah $\frac{1}{2}$ jam kedepan adalah 39%.
c. Menentukan waktu harapan sampai pengikut instagram sebanyak 500 apabila saat ini terdapat 350 pengikut. Menggunakan Teorema 3.2 didapatkan waktu tunggu sampai mendapatkan 150 pengikut instagram lagi adalah $E(S_{ig,150}) = 75$. Jadi waktu yang diharapakan sampai terjadinya penambahan 150 pengikut berikutnya adalah 75 jam.
d. Menentukan probabilitas pada jam sebelumnya bertambahnya 7 pengikut facebook ketika diketahui banyaknya penambahan pengikut seluruh akun media sosial pada jam sebelumnya adalah 11. Menggunakan Teorema 3.4 didapatkan $P(N_{fb}(t) = 7\,|N(t) = 11) = 0{,}2384$. Jadi kemungkinan pada jam sebelumnya terjadi penambahan pengikut akun facebook sebanyak 7 pengikut, ketika diketahui seluruh akun bertambah 11 pengikut adalah sebesar 23%.
e. Menentukan probabilitas pada jam sebelumnya bertambah lima pengikut facebook dan dua pengikut twitter ketika

ISSN 2407-9189

diketahui banyaknya penambahan pengikut seluruh akun media sosial pada jam sebelumnya adalah 11. Menggunakan Teorema 3.5 didapatkan $P(N_{ig}(t) = 2, N_{fb}(t) = 7$ $, N_{tw}(t) = 2 | N(t) = 11) = 0{,}0707$. Jadi kemungkinan pada jam sebelumnya akun facebook bertambah 7 pengikut dan akun twitter bertambah 2 pengikut, ketika diketahui seluruh akun bertambah 11 pengikut adalah sebesar 7%.

f. Menentukan probabilitas bahwa terjadi penambahan 6 pengikut instagram sebelum bertambahnya 4 pengikut twitter. Menggunakan Teorema 3.6 didapatkan $P(S_{ig,6} < S_{tw,4}) = 0{,}6503$. Jadi kemungkinan akun instagram bertambah 6 pengikut sebelum bertambahnya 4 pengikut akun twitter adalah sebesar 65%.

3.3.2 Contoh Pemecahan Proses Poisson Independen

Banyaknya pengunjung yang datang di suatu swalayan membentuk proses Poisson dengan rata-rata 15 orang tiap menit. Seseorang yang datang diklasifikasikan dalam tiga tipe yaitu pria dewasa, putri dewasa atau anak-anak. Ketiga tipe saling independen dengan probabilitas berturut-turut $\frac{1}{5}, \frac{3}{5}$ dan $\frac{1}{5}$. Seorang pengunjung pria dewasa akan menghabiskan biaya Rp.50.000, putri dewasa Rp.150.000 dan anak-anak Rp.20.000

Banyaknya pengunjung yang datang diasumsikan mengikuti proses Poisson $\{N(t) | t \geq 0\}$ dan parameternya $\lambda = 15$ orang/menit dengan t dalam menit. Setiap pengunjung dibedakan menjadi tiga tipe yaitu tipe I untuk pengunjung pria dewasa dengan probabilitas $p_1 = \frac{1}{5}$, tipe II untuk pengunjung putri dewasa dengan probabilitas $p_2 = \frac{3}{5}$, dan tipe III adalah pengunjung anak-anak dengan probabilitas $p_3 = \frac{1}{5}$.

Berdasarkan Teorema 3.7 diperoleh pemecahan proses Poisson menghasilkan tiga proses Poisson yaitu $\{N_1(t) | t \geq 0\}$, $\{N_2(t) | t \geq 0\}$, dan $\{N_3(t) | t \geq 0\}$ dengan $N_1(t), N_2(t), N_3(t)$ berturut-turut adalah banyaknya kedatangan pengunjung pria dewasa, putri dewasa, anak-anak. Setiap proses memiliki parameter yaitu $\lambda_1 = 3$ orang/menit, $\lambda_2 = 9$ orang/menit, dan $\lambda_3 = 3$ orang/menit. Setiap proses saling independen karena banyaknya kedatangan pengunjung tipe I tidak mempengaruhi banyaknya kedatangan tipe II maupun tipe III, begitu juga sebaliknya.

Misalkan $X(t)$ adalah banyaknya uang yang akan didapat toko swalayan selama interval waktu t menit diperoleh

$$E(X(t)) = E(50000\, N_1(t) + 150000\, N_2(t) + 20000\, N_3(t))$$

Ketika $t = 5$ menit didapatkan $E(X(5)) = 7800000$ sehingga dapat disimpulkan selama 5 menit diharapkan banyaknya uang yang didapat swalayan tersebut adalah sebesar Rp. 7.800.000

4. KESIMPULAN

Berdasarkan hasil dan pembahasan diperoleh kesimpulan sebagai berikut.

1. Penggabungan proses Poisson independen berarti untuk sebanyak m proses Poisson yang saling independen yaitu $\{N_1(t) | t \geq 0\}, \{N_2(t) | t \geq 0\}, \ldots, \{N_m(t) | t \geq 0\}$ dengan parameter berturut-turut $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ dijumlah- kan sehingga menghasilkan suatu proses tunggal yaitu $\{N(t) | t \geq 0\}$ dengan $N(t) = N_1(t) + N_2(t) \ldots N_m(t)$ mempunyai sifat sebagai berikut.
   a. Merupakan proses Poisson.
   b. Memiliki parameter yaitu $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_m$.

   Penggabungan proses Poisson independen berhubungan dengan distribusi binomial, distribusi multinomial, dan waktu tunggu. Sedangkan pemecahan proses Poisson adalah penguraian proses Poisson tunggal yaitu $\{N(t) | t \geq 0\}$ dengan parameter λ

ISSN 2407-9189

menghasilkan m proses yaitu $\{N_1(t)|t \geq 0\}, \{N_2(t)|t \geq 0\}, \ldots, \{N_m(t)|t \geq 0\}$, masing-masing proses tersebut memiliki sifat sebagai berikut.

a. Merupakan proses Poisson.
b. Memilki parameter berturut-turut $\lambda_1 = \lambda p_1,\ \lambda_2 = \lambda p_2, \ldots, \lambda_m = \lambda p_m$.
c. Saling independen.

Penggabungan dan pemecahan proses Poisson independen dapat diterapkan pada kegiatan sehari-hari yang berhubungan dengan banyaknya kejadian di suatu interval waktu dan memenuhi syarat proses Poisson.

REFERENSI

[1] Agarwal A, Peter B, David L, James EM, Wei Q. The Conditional Poisson Process and the Erlang and Negative Binomial Distributions. *Open Journal of Statistics*. 2017; 7:16-22.

[2] Allen LJS, *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology*. Upper Saddle River Prentice Hall; 2003.

[3] DeJardine ZVC. Poisson Processes and Applications in Hockey. Lakehead University Canada; 2013.

[4] Gallager RG, *Discrete Stochastic Processes. Second Edition*. Spring; 2011.

[5] Kulkarni VG. *Modeling and Analysis of Stochastic Systems. Third Edition*. Florida:Chapman and Hall;2017.

[6] Mingola P. A Study of Poisson and Related Processes with Applications. University of Tennessee Honors Thesis Project Knoxville;2013.

[7] Ross SM. *Introduction to Probability Model. Tenth Edition*. Academic Press: 2010.

ISSN 2407-9189