Penentuan Probabilitas Absorpsi dan Ekspektasi Durasi pada Masalah Kebangkrutan Penjudi

Aditya Candra Laksmana[1*], Respatiwulan[2], dan Ririn Setiyowati[3]
[1, 3]Program Studi Matematika Fakultas MIPA, Universitas Sebelas Maret Surakarta
[2] Program Studi Statistika Fakultas MIPA, Universitas Sebelas Maret Surakarta
Jalan Ir. Sutami 36A, Surakarta 57126
Email: acl280895@gmail.com

Keywords:
kebangkrutan penjudi; probabilitas absorpsi; ekspektasi durasi

Abstrak

Masalah kebangkrutan penjudi merupakan kejadian seorang penjudi mengalami kebangkrutan sampai kehilangan seluruh modal yang dimiliki. Pada permainan judi, perubahan modal yang terjadi merupakan suatu kejadian random yang diamati berdasarkan waktu. Probabilitas penjudi memperoleh atau kehilangan seluruh modal disebut probabilitas absorpsi, dan nilai harapan dari banyaknya permainan sampai penjudi menang total atau bangkrut disebut ekspektasi durasi. Probabilitas absorpsi dan ekspektasi durasi diperoleh dari penurunan persamaan difference yang menyatakan hubungan kenaikan dan penurunan modal penjudi. Tujuan penelitian ini adalah menentukan probabilitas absorpsi dan ekpektasi durasi pada masalah kebangkrutan penjudi. Probabilitas absorpsi dan ekspektasi durasi dipengaruhi oleh nilai probabilitas menang, probabilitas kalah, modal awal, dan modal total yang dimiliki penjudi. Pada penerapan kasus diberikan modal awal 50 dan modal total 100. Ketika probabilitas menang 0.49 dan probabilitas kalah 0.51, penjudi bangkrut pada permainan ke-1904 dengan probabilitas absorpsi bangkrut sebesar 0.880825. Selanjutnya, ketika probabilitas menang 0.50 dan probabilitas kalah 0.50, penjudi bangkrut pada permainan ke-2500 dengan probabilitas absorpsi bangkrut 0.50.

1. PENDAHULUAN

Perjudian adalah kegiatan mempertaruhkan sesuatu yang dianggap bernilai pada permainan atau kejadian yang belum pasti hasilnya [1]. Kejadian seorang penjudi yang mengalami kehilangan semua modal sampai habis disebut sebagai kejadian kebangkrutan penjudi. Perjudian terus berlanjut sampai semua modal yang dimiliki penjudi habis atau mendapat seluruhnya dari yang dipertaruhkan, sehingga salah satu dari penjudi bangkrut [2]. Perubahan modal yang terjadi pada setiap permainan judi bisa saja bertambah atau berkurang sampai permainan berhenti. Perubahan modal dapat dipandang sebagai suatu kejadian random yang diamati berdasarkan waktu. Kejadian tersebut merupakan kejadian khusus dari proses stokastik. Masalah kebangkrutan penjudi merupakan rantai Markov waktu diskrit pada proses random walk. Hal tersebut dikarenakan kondisi permainan yang berikutnya dipengaruhi oleh permainan saat ini [3].

El-Shehawey [4], mengembangkan masalah kebangkrutan penjudi pada rantai Markov berhingga dengan probabilitas menang atau kalah bergantung pada jumlah modal yang dimiliki penjudi saat ini. Katriel mengembangkan penentuan rumus probabilitas kebangkrutan penjudi dengan asumsi bahwa jumlah modal lawan memiliki distribusi probabilitas [5]. Lorek memecahkan masalah kebangkrutan penjudi secara umum, dengan memanfaatkan dualitas Siegmund pada rantai Markov [6]. Pada masalah kebangkrutan penjudi, probabilitas seorang penjudi memperoleh atau kehilangan seluruh modal yang dipertaruhkan disebut sebagai probabilitas absorpsi. Nilai harapan dari banyaknya permainan sampai penjudi memperoleh atau kehilangan seluruh modal yang dipertaruhkan disebut sebagai ekspektasi durasi. Pada penelitian ini, dilakukan penentuan serta penerapan probabilitas absorpsi dan ekspektasi durasi pada masalah kebangkrutan penjudi.

2. METODE

Metode penelitian yang digunakan adalah berupa kajian pustaka dengan mengumpulkan sumber pustaka serta mempelajari karya ilmiah dari hasil penelitian para pakar yang termuat dalam jurnal atau buku yang berkaitan dengan masalah kebangkrutan penjudi. Adapun langkah-langkah yang dilakukan pada penelitian ini diuraikan sebagai berikut.

1) Menjelaskan proses dan konsep dasar dari masalah kebangkrutan penjudi.

2) Menurunkan ulang persamaan difference homogen untuk probabilitas absorpsi dan persamaan *difference nonhomogen* untuk ekspektasi durasi.

3) Memberikan asumsi untuk menurunkan persamaan difference probabilitas absorpsi dan ekspektasi durasi sehingga diperoleh nilai persamaan karakteristik.

4) Menentukan solusi umum dari persamaan difference homogen untuk probabilitas absorpsi dan selanjutnya diberikan kondisi batas untuk menentukan solusi khusus.

5) Menentukan solusi umum dari persamaan difference homogen untuk ekspektasi durasi dan selanjutnya diberikan asumsi untuk menentukan solusi umum dari persamaan difference nonhomogen.

6) Menentukan solusi khusus dari persamaan difference nonhomogen untuk ekspektasi durasi yang diperoleh dengan memberikan kondisi batas.

7) Menerapkan contoh masalah kebangkrutan penjudi untuk menentukan probabilitas absorpsi dan ekspektasi durasi.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bagian ini membahas mengenai penentuan probabilitas absorpsi dan ekspektasi durasi pada masalah kebangkrutan penjudi serta penerapan kasus.

3.1. Rantai Markov Waktu Diskrit

Menurut Allen [4], proses stokastik adalah kumpulan variabel random $\{X_n(s): n \in T, s \in S\}$, dengan T adalah himpunan indeks dan S adalah ruang sampel dari variabel random. Rantai Markov waktu diskrit adalah proses stokastik dengan kejadian berikutnya hanya bergantung pada kejadian saat ini dengan ruang sampel berhingga {0, 1, 2, ...,N} dan waktu diskrit T = {0, 1, 2, ...}. Berikut dua definisi tentang rantai Markov waktu diskrit [4]:

Definisi 1. Proses stokastik waktu diskrit $\{X_n\}$ dikatakan rantai Markov waktu diskrit jika

$$\text{Prob}\{X_n=i_n \mid X_0=i_0,\dots,X_{n-1}=i_{n-1}\}=\text{Prob}\{X_n=i_n \mid X_{n-1}=i_{n-1}\}$$

ISSN 2407-9189

Definisi 2. Probabilitas transisi satu langkah p_ji (n) didefinisikan dengan

p_ji (n)=Prob{X_(n+1)=j|X_n=i}

probabilitas bahwa proses berada di state j pada waktu n+1 diberikan oleh proses di state i pada waktu n, dengan i, j = 1, 2, ...

Probabilitas transisi berpengaruh terhadap perpindahan state yang menyatakan perubahan modal dari modal semula. Perubahan modal sampai dengan permainan berhenti dapat dinyatakan sebagai rantai Markov yang diamati berdasarkan waktu, serta bergantung pada probabilitas transisi [7].

3.2. Persamaan Difference pada Kebangkrutan Penjudi

Pada masalah kebangkrutan penjudi, persamaan *difference* digunakan untuk menentukan probabilitas absorpsi dan ekspektasi durasi. Probabilitas absorpsi dibagi menjadi 2 yaitu a_k yang menyatakan probabilitas absorpsi ketika mengalami kebangkrutan dan b_k yang menyatakan probabilitas absorpsi ketika menang total dengan nilai $a_k + b_k = 1$. Persamaan *difference* dari probabilitas kebangkrutan a_k, untuk k merupakan modal penjudi dengan $k \epsilon [0,N]$ [4]. Jika penjudi menang, maka modal menjadi k+1 dan probabilitas kebangkrutan adalah a_{k+1}. Jika penjudi kalah, maka modal menjadi k-1dan probabilitas kebangkrutan adalah a_{k-1}. Hubungan antara a_{k+1}, a_k, dan a_{k-1} diberikan dalam bentuk persamaan *difference* berikut

$$a_k = pa_{k+1} + qa_{k-1} \qquad (3.1)$$

dengan p dan q masing-masing adalah probabilitas penjudi menang dan kalah. Kondisi batas untuk a_k adalah a_0 = 1 dan a_N = 0.

Seperti pada probabilitas absorpsi, persamaan *difference* untuk ekspektasi durasi yang dinotasikan dengan τ_k dapat diturunkan. Jika penjudi menang, maka modal menjadi k+1 dengan ekspektasi durasi adalah 1+τ_{k+1}. Jika penjudi kalah, maka modal menjadi k-1 dengan ekspektasi durasi adalah 1+τ_{k-1}. Persamaan *difference* untuk τ_k adalah

$$\tau_k = p(1 + \tau_{k+1}) + q(1 + \tau_{k-1}) \qquad (3.2)$$

dengan kondisi batas yang diberikan adalah $\tau_0 = 0 = \tau_N$. Penyelesaian dari persamaan (3.1) dan (3.2) diperoleh dengan memberikan nilai $a_k = \lambda^k \neq 0$ dan $\tau_k = \lambda^k \neq 0$. Solusi untuk menyelesaikan persamaan *difference* dari probabilitas absorpsi dan ekspektasi durasi dibagi menjadi 2 kasus, yaitu ketika $p \neq q$ dan $p = q = 1/2$.

Penentuan probabilitas absorpsi dan ekspektasi durasi diperoleh dengan menurunkan persamaan *difference* (3.1) dan (3.2). Persamaan *difference* (3.1) untuk probabilitas absorpsi merupakan persamaan linear orde dua, homogen serta memiliki koefisien konstan. Untuk persamaan *difference* dari ekspektasi durasi telah diberikan pada persamaan (3.2). Mengingat bahwa $p + q = 1$, persamaan (3.2) dapat diubah ke dalam bentuk

$$p\,\tau_{k+1} - \tau_k + q\tau_{k-1} = -1 \qquad (3.3)$$

yang merupakan persamaan linear orde dua, nonhomogen, dan memiliki koefisien konstan. Penyelesaian persamaan *difference* nonhomogen (3.3), ditentukan berdasarkan persamaan *difference* homogen dari persamaan tersebut. Berikut diberikan persamaan *difference* homogen untuk ekspektasi durasi adalah

$$p\,\tau_{k+1} - \tau_k + q\tau_{k-1} = 0. \qquad (3.4)$$

3.3. Nilai Persamaan Karakteristik

Persamaan (3.1) dan (3.4) berturut-turut merupakan persamaan *difference* homogen dari probabilitas absorpsi dan ekspektasi durasi. Persamaan *difference* homogen tersebut diselesaikan dengan menentukan persamaan karakteristik yang diperoleh dari mensubstitusi nilai $a_k = \lambda^k \neq 0$ dan $\tau_k = \lambda^k \neq 0$. Berikut adalah persamaan karakteristik untuk nilai a_k dan τ_k

pλ^(k+1)-λ^k+q^(k-1)=0 (3.5)

dengan nilai λ merupakan nilai persamaan karakteristik.Bentuk sederhana persamaan (3.5) yaitu dengan mengambil nilai k = 1, dan diperoleh persamaan karakteristik sederhana untuk probabilitas absorpsi serta ekspektasi durasi adalah:

pλ^2-λ+q=0. (3.6)

Penentuan nilai persamaan karakteristik dari persamaan difference homogen untuk probabilitas absorpsi dan ekspektasi durasi diperoleh dengan mencari nilai λ_1 dan λ_2 yang diterapkan pada kasus p ≠ q dan p = q = 1/2. Pada kasus p ≠ q, nilai

persamaan karakteristik (3.6), dengan mengingat p+q = 1 diperoleh nilai untuk

λ_1 dan λ_2 adalah

$$\lambda_1 = \frac{1+(p-q)}{2p}$$

$$= \frac{(p+q)+(p-q)}{2p} = \frac{2p}{2p} = 1$$

$$\lambda_2 = \frac{1-(p-q)}{2p} = \frac{(p+q)-(p-q)}{2p}$$

$$= \frac{2q}{2p} = \frac{q}{p}$$

Pada kasus $p = q = 1/2$, nilai persamaan karakteristik (3.6) yaitu nilai $\lambda_{1,2}$ diperoleh

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm (p-q)}{2p}$$

$$= \frac{1 \pm (1/2-1/2)}{2.\ 1/2} = 1.$$

3.4 Probabilitas Absorpsi

Persamaan difference untuk probabilitas absorpsi diberikan pada persamaan (3.1) dan diselesaikan pada dua kasus yaitu ketika p ≠ q dan p = q = 1/2. Ketika p ≠ q, diperoleh nilai persamaan karakteristik (3.6) adalah λ_1 = 1 dan λ_2= q/p. Solusi umum untuk persamaan difference a_k adalah a_k = c_1 + c_2 〖(q/p)〗 ^k, dengan c_1 dan c_2 adalah suatu konstanta yang diperoleh dari menerapkan kondisi batas a_0 = 1 = c_1 + c_2 dan a_N =0= c_1 + c_2 〖(q/p)〗 ^N. Diperoleh nilai c_1 = 〖-(q/p)〗 ^N/(1 〖-(q/p)〗 ^N) dan c_2 = 1/(1 〖-(q/p)〗 ^N), selanjutnya disubstitusi ke solusi umum a_k dan diperoleh solusi khusus untuk a_k dan b_k adalah

$$a_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^N - \left(\frac{q}{p}\right)^k}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \quad (3.7)$$

$$b_k = \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^k - 1}{\left(\frac{q}{p}\right)^N - 1} \quad (3.8)$$

dengan $a_k + b_k = 1$.

Ketika $p = q = 1/2$, diperoleh nilai persamaan karakteristik (3.6) adalah $\lambda_{1,2} = 1$. Solusi umum untuk persamaan *difference* a_k adalah $a_k = c_1 + c_2 k$, dengan c_1 dan c_2 adalah suatu konstanta yang diperoleh dari menerapkan kondisi batas $a_0 = 1 = c_1$ dan $a_N = 0 = c_1 + c_2 N$. Diperoleh nilai $c_1 = 1$ dan $c_2 = -\frac{1}{N}$, selanjutnya disubstitusi ke solusi umum

a_k dan diperoleh solusi khusus untuk a_k dan b_k adalah

$$a_k = \frac{N-k}{N} \quad (3.9)$$

ISSN 2407-9189

$$b_k = \frac{k}{N} \qquad (3.10)$$

3.5 Ekspektasi Durasi

Persamaan *difference* untuk ekspektasi durasi diberikan pada persamaan (3.3) dan diselesaikan untuk dua kasus. Untuk $p \neq q$, solusi umum persamaan *difference* homogen adalah $\tau_k = c_1 + c_2 (\frac{q}{p})^k$. Selanjutnya, diberikan nilai $\tau_k = ck$ dengan c merupakan suatu konstanta, untuk mencari solusi umum dari persamaan nonhomogen (3.3). Nilai konstanta c dicari dengan substitusi $\tau_k = ck$ ke persamaan (3.3), dan diperoleh $c = \frac{1}{q-p}$. Solusi umum nonhomogen untuk persamaan *difference* adalah $\tau_k = c_1 + c_2 (\frac{q}{p})^k + \frac{k}{q-p}$. Selanjutnya, dengan menerapkan kondisi batas diperoleh $\tau_0 = 0 = c_1 + c_2$ dan $\tau_N = 0 = c_1 + c_2 (\frac{q}{p})^N + \frac{N}{q-p}$. Nilai dari konstanta c_1 dan c_2 adalah $c_1 = \frac{-N}{(q-p)(1-(\frac{q}{p})^N)}$ dan $c_2 = -c_1$. Berikut diperoleh solusi khusus persamaan *difference* nonhomogen untuk $\hat{\sigma}_k$, dengan substitusi nilai c_1 dan c_2 ke solusi umum nonhomogen diperoleh

$$\tau_k = \frac{1}{q-p} [k - N \left(\frac{1-(\frac{q}{p})^k}{1-(\frac{q}{p})^N} \right)] \qquad (3.11)$$

Ketika nilai p = q = 1/2, solusi umum persamaan difference homogen adalah τ_k=c_1+c_2 k. Untuk mencari solusi umum pada persamaan nonhomogen (3.3), diberikan nilai τ_k= 〖ck〗 ^2, dengan c merupakan suatu konstanta dan diperoleh c = −1. Selanjutnya, nilai c = −1 disubstitusi ke τ_k= 〖ck〗 ^2 dan diperoleh solusi umum persamaan difference nonhomogen τ_k=c_1+c_2 k-k^2. Solusi khusus dari persamaan difference τ_k (3.3) diselesaikan dengan menerapkan kondisi batas τ_0=c_1=0 dan τ_N=c_1+c_2 N-N^2=0, sehingga diperoleh nilai untuk c_1 = 0 dan c_2 = N. Selanjutnya, dari substitusi nilai c_1 dan c_2 ke solusi umum nonhomogen diperoleh solusi khusus persamaan difference nonhomogen adalah

τ_k=k(N-k) (3.12)

3.6 Penerapan Kasus

Pada penerapan kasus diberikan parameter yang mengacu pada Allen [1] untuk menentukan probabilitas absorpsi dan ekspektasi durasi pada masalah kebangkrutan penjudi. Parameter yang digunakan adalah modal total N = 100, modal awal yang dimiliki penjudi k = 50. Pada permainan judi tersebut diberikan asumsi bahwa pemain hanya dua orang dengan probabilitas absorpsi dan ekspektasi durasi ditinjau dari salah satu pemain.

Pada kasus pertama diberikan probabilitas menang p = 0.49 dan probabilitas kalah q = 0.51 dengan p ≠ q. dari nilai modal awal, modal total, serta probabilitas menang dan kalah digunakan untuk menentukan probabilitas absorpsi yang diperoleh dengan persamaan (3.7) dan (3.8). Nilai probabilitas absorpsi untuk probabilitas bangkrut a_k yang mengacu pada persamaan (3.7) adalah

$$a_{50} = \frac{\left(\frac{0.51}{0.49}\right)^{100} - \left(\frac{0.51}{0.49}\right)^{50}}{\left(\frac{0.51}{0.49}\right)^{100} - 1} = 0.880825.$$

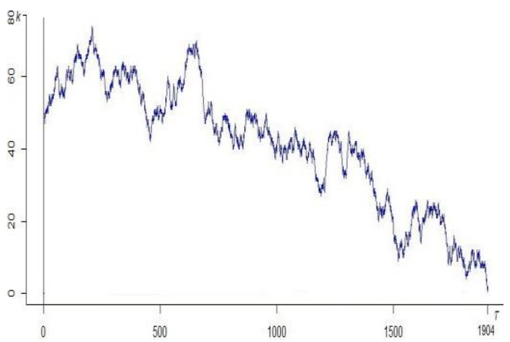
Selanjutnya, ditentukan nilai probabilitas absorpsi penjudi untuk menang total b_k yang mengacu pada persamaan (3.8) adalah

b_50=((0.51/0.49)^50-1)/((0.51/0.49)^100-1)=0.119175.

Berdasarkan pada nilai probabilitas absorpsi yang diperoleh, diketahui bahwa probabilitas absorpsi untuk kebangkrutan adalah 0.880825 dan probabilitas absorpsi untuk menang total adalah 0.119175. Dapat disimpulkan bahwa probabilitas penjudi mengalami kebangkrutan lebih besar daripada probabilitas penjudi mengalami menang total pada akhir permainan. Oleh karena itu, pada kasus ini diketahui bahwa penjudi mengalami kebangkrutan pada akhir permainan. Setelah probabilitas absorpsi diperoleh, selanjutnya ditentukan nilai harapan dari banyak permainan judi sampai berhenti (ekspektasi durasi). Nilai ekspektasi durasi yang mengacu pada persamaan (3.11) adalah

$$\tau_{50} = \frac{1}{0.51-0.49}\left[50 - 100\left(\frac{1-\left(\frac{0.51}{0.49}\right)^{50}}{1-\left(\frac{0.51}{0.49}\right)^{100}}\right)\right]$$
$$= 1904$$

Untuk mengamati perubahan banyaknya modal setiap permainan serta ekspektasi durasi permainan untuk $p \neq q$ diberikan pada Gambar 1.



Gambar 1. Perubahan modal setiap permainan untuk $p \neq q$

Dari Gambar 1, menunjukkan perubahan modal untuk setiap permainan, dengan setiap kali menang atau kalah mengakibatkan modal yang berfluktuasi naik atau turun. Ketika modal mencapai titik 0 menyatakan seorang penjudi mengalami suatu kebangkrutan. Pada kasus $p \neq q$ penjudi mengalami kebangkrutan pada permainan ke-1904 dengan modal awal yang dimiliki sebesar $k = 50$ dan probabilitas absorpsi bangkrut sebesar $a_{50} = 0.880825$.

Pada kasus kedua diberikan probabilitas menang $p = 0.50$ dan probabilitas kalah $q = 0.50$ dengan $p = q$. Nilai probabilitas absorpsi untuk probabilitas bangkrut a_k yang mengacu pada persamaan (3.9) adalah

$$a_{50} = \frac{100-50}{100} = 0.5.$$

Selanjutnya, ditentukan nilai probabilitas absorpsi penjudi untuk menang total yang dinyatakan b_k yang mengacu pada persamaan (3.10) adalah

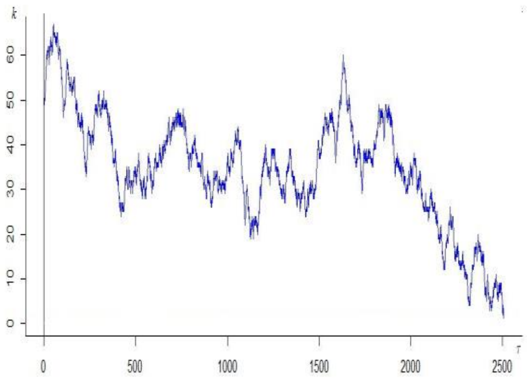
$$b_{50} = \frac{50}{100} = 0.5.$$

Berdasarkan pada nilai probabilitas absorpsi yang diperoleh, diketahui bahwa probabilitas seorang penjudi mengalami kebangkrutan dan menang total adalah 0.5. Oleh karena itu, dapat disimpulkan bahwa probabilitas penjudi mengalami kebangkrutan sama dengan probabilitas penjudi mengalami menang total. Hal ini mengakibatkan bahwa seorang penjudi bisa mengalami kebangkrutan atau menang total pada akhir permainan. Setelah probabilitas absorpsi diperoleh, selanjutnya ditentukan nilai harapan dari banyak permainan judi sampai berhenti (ekspektasi durasi). Nilai ekspektasi durasi yang mengacu pada persamaan (3.12) adalah

$\tau_{50}=50(100-50)=2500.$

Untuk mengamati perubahan banyaknya modal setiap permainan serta ekspektasi durasi permainan untuk $p = q$ diberikan pada Gambar 2.

ISSN 2407-9189



Gambar 2. Perubahan modal setiap permainan untuk p= q

Dari Gambar 2 , menunjukkan perubahan modal untuk setiap permainan, dengan setiap kali menang atau kalah mengakibatkan modal yang berfluktuasi naik atau turun. Pada kasus p = q = 1/2, penjudi mengalami kebangkrutan pada permainan ke- 2500 dengan modal awal yang dimiliki sebesar k = 50 dan probabilitas absorpsi bangkrut sebesar a_50 = 0.5.

4. KESIMPULAN

Berdasarkan pembahasan yang telah dilakukan dapat diambil 2 kesimpulan.

1) Probabilitas absorpsi bangkrut (a_k) dan menag total (b_k) serta ekspektasi durasi (τ_k) pada masalah kebangkrutan penjudi untuk p ≠ q adalah

$$a_k = \frac{(\frac{q}{p})^N - (\frac{q}{p})^k}{(\frac{q}{p})^N - 1},\ b_k = \frac{(\frac{q}{p})^k - 1}{(\frac{q}{p})^N - 1},$$

$$\tau_k = \frac{1}{q-p}\left[k - N\left(\frac{1-(\frac{q}{p})^k}{1-(\frac{q}{p})^N}\right)\right],$$

sedangkan untuk $p = q = {}^1/_2$ adalah

$$a_k = \frac{N-k}{N},\quad b_k = \frac{k}{N},\ \tau_k = k(N-k).$$

2) Berdasarkan penerapan kasus diperoleh hasil bahwa ketika nilai p ≠ q, probabilitas absorpsi kebangkrutan 0.880825 dan menang total 0.119175, dan berhenti pada permainan ke-1904. Selanjutnya, ketika p = q = 1/2, probabilitas absorpsi kebangkrutan dan menang total masing-masing sebesar 0.5 dan berhenti pada permainan ke-2500. Dari kedua penerapan kasus masing-masing permainan judi berhenti dengan modal awal yang dimiliki adalah 50 menjadi 0, yang berarti seorang penjudi mengalami kebangkrutan pada akhir permainan.

REFERENSI

[1] Kartini, K. *Patologi Sosial*. Jakarta : Rajagrafindo Press; 2003.

[2] Feller, W. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Third Edition. Vol. 1*. New York: Wiley; 1968.

[3] Allen, L.J.S. *An Introduction to Stochastic Processes with Applications to Biology*. Upper Saddle River, N.J: Prentice Hall; 2003.

[4] El-Shehawey, M.A., On the Gamblers Ruin Problem for a Finite Markov Chain. *Statistics and Probability Letters*. 2009; 79:1590-1595.

[5] Katriel,G. Gambler's Ruin- A General Formula. *Probability Letters*. 2013; 10 (83**)**: 2205-2210.

[6] Lorek, P. Generalized Gambler's Ruin Problem: Explicit Formulas Via Siegmund Duality. Mathematical Institute, University of Wrocław, Poland;2016.

[7] Ross, S. *A First Course in Probability*. *Eighth Edition*. Upper Saddle River, N.J: Pearson Prentice Hall;2010.

ISSN 2407-9189